

# İletişim Kısıtları Altında Dağıtık Rasgele-Alan Kestirimi

## Decentralized Random-Field Estimation Under Communication Constraints

Murat Üney<sup>†‡</sup>, Müjdat Çetin<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Sabancı Üniversitesi

<sup>‡</sup>Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi

{muratuney, mctetin}@sabanciuniv.edu

### Özetçe

Bayeşçi yaklaşımla bir rasgele alanın iletişim kısıtları altında dağıtık kestirim problemini ele almaktayız. Söz konusu sistem ilintilendirildikleri rasgele değişkenler kaynaklı ölçümler alan ve yönlü, döngülü olmayan bir topolojiye uyacak şekilde sonlu kapasitede kanallardan iletişim yapabilen algılayıcı düğümlerinden oluşmaktadır. Eğer varsa gelen mesajları aldıktan sonra, her düğüm kendi yerel kuralının, yaptığı ölçümler ve bu mesajlara karşılık gelen değerini hesaplayarak bir kestirim ve çocuk düğümlere iletilecek mesajlar elde eder. Bu yapı, hem iletişim hem de kestirim hatası kaynaklı maliyetleri içeren bir Bayeşçi risk işlevinin eniyilenmesinde, olurluk kümesinin kısıtlanması için kullanılarak kesin bir problem tanımı elde edilir. Biz, bu tanım ile dağıtık sezim problemi için Takım Karar Teorisi değerlendirmesi sonucu önerilen bir özyineli çözümü kestirim problemine uyarladık. Ancak bu durumda özyinelemelerdeki ifadeler genel olarak kapalı formda çözümü olmayan tümlev operatörleri içermektedir. Çözüm olarak Monte Karlo yöntemleri ile bu ifadelere yaklaşımlar önermekteyiz. Sonuçta ortaya iletişim kısıtları altında dağıtık kestirimci ağlarının eniyilenmesi için yaklaşımlanmış hesaplamalara dayanan bir yöntem çıkmaktadır. Bir örnek senaryoda iletişim pahasının arttırılmasına bağlı olarak yakınsanan kuralların kestirim başarımındaki düşüşü sergilemekteyiz.

### Abstract

We consider the problem of decentralized estimation of a random-field under communication constraints in a Bayesian setting. The underlying system is composed of sensor nodes which collect measurements due to random variables they are associated with and which can communicate through finite-rate channels in accordance with a directed acyclic topology. After receiving the incoming messages if any, each node evaluates its local rule given its measurement and these messages, producing an estimate as well as outgoing messages to child nodes. A rigorous problem definition is achieved by constraining the feasible set through this structure in order to optimize a Bayesian risk function that captures the costs due to both communications and estimation errors. We adopt an iterative solution through a Team Decision Theoretic treatment previously proposed for decentralized detection. However, for the estimation problem, the iterations contain expressions with integral operators that have

Bu çalışma TÜBİTAK'ın 105E090 ve Avrupa Komisyonu'nun MİRG-CT-2006-041919 sayılı projeleri kapsamında ve bir TÜBA-GEBİP ödülü ile desteklenmiştir.

no closed form solutions in general. We propose approximations to these expressions through Monte Carlo methods. The result is an approximate computational scheme for optimization of distributed estimation networks under communication constraints. In an example scenario, we increase the price of communications and present the degrading estimation performance of the converged rules.

### 1. Giriş

Algılayıcı ağı uygulamaları ile ilgi gören İmeceli Sinyal ve Bilgi İşleme kapsamında tekrar güncel olan problemlerden bir tanesi de bir rasgele alanın dağıtık kestirimidir. Önerilen yaklaşımlarda çoğunlukla bir merkez düğüm etrafında, aldıkları ölçümü işleyerek elde ettikleri sonucu mesaj olarak merkez düğüme gönderen çevre düğümler yer alır. Merkezdeki düğüm ise aldığı mesajları değerlendirerek bir kestirim üretir. Problem, kestirim hatasını düşük yapacak şekilde her düğüm için işlevler bulmaktır. Sonlu kapasitede kanallar durumunda çözüm çoğunlukla çevre düğümleri için nicemleyici tasarımı ve merkez düğüm için olası mesajların kartezyen çarpımından rasgele alanın değer aldığı kümeyle bir kestirimci işlevin belirlenmesi şeklindedir. Bu bağlamda iletişim kısıtları probleme yıldız biçimli, yönlü bir ağ topolojisi ve her kenar için atamış kapasite olarak yansımaktadır [1]-[4].

Öte yandan, [5]'de bir dağıtık sezimci ağı ele alınarak iletişim ve hesaplama yapısı daha genel bir şekilde ifade edilmektedir. Buna göre,  $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$  olmak üzere  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  bir çoklu-ağaç çizge olsun.  $(i, j) \in \mathcal{E}$ ,  $i$ . düğümden  $j$ . ye yönlü iletişim kanalını temsil etmek üzere,  $i$ . düğüm  $\mathcal{U}_{i \rightarrow j}$  kümesinden bir sembol iletebilir. Ebeveyn düğümler  $\pi(j) \triangleq \{i \in \mathcal{V} | (i, j) \in \mathcal{E}\}$ ' den gelen tüm mesajlar  $u_{\pi(j)} \triangleq \{u_{i \rightarrow j} | i \in \pi(j)\}$ ,  $\pi(j) = \{\pi_1, \dots, \pi_P\}$  ve  $P$  ebeveyn sayısı olmak üzere  $\mathcal{U}_{\pi(j)} \triangleq \mathcal{U}_{\pi_1 \rightarrow j} \times \dots \times \mathcal{U}_{\pi_P \rightarrow j}$  kümesinden değer alır.  $j$ . düğümün çocuk düğümleri  $\chi(j) \triangleq \{k \in \mathcal{V} | (j, k) \in \mathcal{E}\}$  olmak üzere iletileceği mesajlar  $u_j \triangleq \{u_{j \rightarrow k} | k \in \chi(j)\}$  olur ve değer aldıkları  $\mathcal{U}_j$  kümesi,  $\mathcal{U}_{\pi(j)}$ ' ye benzer şekilde tanımlanabilir. Bu işleyişte  $j$ . düğüm, ilintilendirildiği rasgele değişken  $x_j \in \mathcal{X}_j$  etkisi ile  $y_j \in \mathcal{Y}_j$  gözlemini yapar,  $u_{\pi(j)}$  ve  $y_j$ ' ye bağlı olarak,  $\gamma_j : \mathcal{Y}_j \times \mathcal{U}_{\pi(j)} \rightarrow \mathcal{U}_j \times \mathcal{X}_j$  ile tanımlı bir işlevin  $y_j$  ve  $u_{\pi(j)}$ ' ye karşılık gelen değerini hesaplayarak bir kestirim  $\hat{x}_j \in \mathcal{X}_j$  ve giden mesajlar  $u_j \in \mathcal{U}_j$  elde eder.  $\gamma_j$  işlevleri yerel kurallar,  $\gamma \triangleq (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$  strateji olarak adlandırılmaktadır. Bu durumda yerel kural uzayları  $j \in \mathcal{V}$  için  $\Gamma_j^{\mathcal{G}} = \{\gamma_j | \gamma_j : \mathcal{Y}_j \times \mathcal{U}_{\pi(j)} \rightarrow \mathcal{U}_j \times \mathcal{X}_j\}$  ve strateji uzayı  $\Gamma^{\mathcal{G}} = \Gamma_1^{\mathcal{G}} \times \dots \times \Gamma_N^{\mathcal{G}}$  olur. İletişim vektörü ise  $u \triangleq \{u_{i \rightarrow j} | (i, j) \in \mathcal{E}\}$  şeklindedir ve yine benzer şekilde

$u \in \mathcal{U}$  olacak şekilde  $\mathcal{U}$  tanımlanabilir. Sonuçta iletişim kısıtları altında dağıtık sezimci tasarımı,  $\mathcal{X}_j$  ve  $\mathcal{U}_{i \rightarrow j}$  sonlu kümeler seçilerek  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_N$  olmak üzere Bayesçi risk işlevi  $u$  ile  $(\hat{x}, x)$  ikilisine sırası ile iletişim ve hata maliyeti atamak için  $c: \mathcal{U} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  biçiminde ve amaç işlev  $J(\gamma) \triangleq E \{c(u, \hat{x}, x); \gamma\}$  iken

$$(P): \min_{\gamma \in \Gamma^g} J(\gamma) \quad (1)$$

şeklinde bir kısıtlı eniyileme problemine dönüşür. Burada beklenen değer  $p(u, \hat{x}, x; \gamma)$  üzerindedir ve bu dağılım da  $\gamma'$  nin seçimi ile belirlenir<sup>1</sup>.

(P)' nin global en iyi çözümünü bulmak NP zorluktur ve yerine Takım Karar Teorisi çerçevesinde bir değerlendirmeye, takımı oluşturan kişiler düğümlere karşılık gelerek yerel kuralların kişilerce en iyi çözüm olduğu stratejiye yakınsayan bir özyineleme önerilmiştir [5]. Buna göre  $\mathcal{X}$  sonlu olduğu için, kişilerce en iyi yerel kuralların her biri sonlu boyutlu bir vektör ile temsil edilebilir. Yerel kurallar ilklendirildikten sonra,  $l$ . adımda ardışık koordinatta azaltmalar ile  $J^l \leq J^{l-1}$  olacak şekilde güncellenir ve yinelemeler sonucu kişilerce en iyi stratejiye yakınsanır. Aynı yaklaşımla kestirim problemi ele alındığında  $\mathcal{X}$  artık sonlu değildir ve kişilerce en iyi yerel kuralların genel olarak sonlu ifadeleri yoktur. Bunun yerine işlevlerin sonlu, yaklaşık temsilleri ve operatörlerin yaklaşıkları kullanılarak Parametrik Olmayan Kanı Yayılma'daki gibi etkin sonuçlar elde etmek mümkün olabilir [6].

Biz, buradan yola çıkarak, (P)' yi kestirim problemi bağlamında ele aldık ve Monte Karlo (MK) tümlev hesaplama yöntemleri kullanarak hem yerel kurallara hem de özyineleme adımlarına yaklaşıklamalar elde ettik. Sonuçta düğümleri kişilerce en iyi yerel kurallara makul nümerik yaklaşıklamalara karşılık gelen hesaplamalar yapan bir dağıtık kestirimci ortaya çıkmaktadır. Özyineleme adımları ise sezim problemindeki ölçeklenebilirlik ve dağıtık işlemeye uygunluk özelliklerini korumaktadır. Böylece literatürde yer alan dağıtık kestirimci yaklaşımlarında yer alanlardan daha genel topolojiler ve farklı düğüm-rasgele değişken eşleşmeleri için de çözüm üretilebilmekte, önsel dağılım bilgisini de hesaba katarak en yüksek olabilirlik yerine Bayesçi bir yaklaşım kullanabilmekte ve iletişim maliyeti de açıkça göz önüne alındığından kestirim hatasının maliyeti ile iletişim yoğunluğu arasındaki ikişikiyi nicemsel olarak sergileyebilmekteyiz.

## 2. Kestirimci Tasarımı

### 2.1. Kişilerce En İyi Strateji

İfade (1)'le verilen problem için takım karar teorisi uyarlanarak bir ilk strateji  $\gamma_0$  ile başlayarak kişilerce en iyi stratejiye yakınsayan bir sabit nokta döngüsü tanımlanabilir [5]. Buna göre  $\gamma^* = (\gamma_1^*, \dots, \gamma_N^*)$  kişilerce en iyi çözüm ise  $j$ . yerel kural  $\gamma_j^* = \arg \min_{\gamma_j \in \Gamma_j} J(\gamma_1^*, \dots, \gamma_{j-1}^*, \gamma_j, \gamma_{j+1}^*, \dots, \gamma_N^*)$  koşulunu sağlar. Dolayısıyla kişilerce en iyi stratejiye yakınsayan bir sabit nokta döngüsü Algoritma 1 ile verilmiştir.

**Algoritma 1: Kişilerce en iyi stratejiye yakınsayan bir özyineleme.**

1)  $l = l + 1$ ;  $j = 1, \dots, N$  için  
 $\gamma_j^l = \arg \min_{\gamma_j \in \Gamma_j} J(\gamma_1^l, \dots, \gamma_{j-1}^l, \gamma_j, \gamma_{j+1}^{l-1}, \dots, \gamma_N^{l-1})$ ;  
2) Eğer  $J(\gamma^{l-1}) - J(\gamma^l) < \varepsilon$  ise dur, değilse Adım 1' e git;

### 2.2. Kişilerce En İyi Dağıtık Kestirimci

Problemimizin matematiksel gösterimi,  $\mathcal{X}$  sonlu olmamak üzere ifade (1)' deki gibidir. Şimdi bazı kabuller yapacağız:

<sup>1</sup>Bildiride bu tür ilişkiler “;” notasyonu kullanılarak  $p(u, \hat{x}, x)$  yerine  $p(u, \hat{x}, x; \gamma)$  kullanılmasıdaki gibi temsil edilecektir.

i. *Ölçümler koşullu bağımsız ve yereldir:*  $y_j$  sadece  $x_j$  kaynaklıdır ve gürültü süreçleri birbirinden bağımsızdır;  $p(y|x) = \prod_{j \in \mathcal{V}} p(y_j|x_j)$ . ii. *Çoklu-ağaç topoloji:*  $\mathcal{G}$  yönlü bir çizgedir ve iki düğüm arasında en çok bir tane (yönlü) yol vardır. iii. *Maliyetlerin yerelliği:* Bayes risk işlevi  $c(u, \hat{x}, x) = \sum_{j \in \mathcal{V}} c_j(u_j, \hat{x}_j, x_j)$  şeklinde yerel maliyetlerin toplamıdır.

Bu kabuller altında ve  $\gamma_j$  hariç tüm yerel kurallar kişilerce en iyi,  $\gamma_{-j} = \gamma_{-j}^*$ , ise  $j$ . düğüm için kişilerce en iyi yerel kural  $(u_j, \hat{x}_j) = \gamma_j^*(Y_j, U_{\pi(j)})$ , [5]' de sezim problemi için verilen ifadelerde toplamlar tümlevlere dönüşerek

$$\gamma_j^*(Y_j, U_{\pi(j)}) = \arg \min_{(u_j, \hat{x}_j) \in (\mathcal{X}_j, U_j)} \int_{x_j \in \mathcal{X}_j} dx_j p(Y_j|x_j) \phi_j^*(u_j, \hat{x}_j, x_j; U_{\pi(j)}) \quad (2)$$

olarak bulunur<sup>3</sup> ve burada

$$\phi_j^*(u_j, \hat{x}_j, x_j; u_{\pi(j)}) \propto p(x_j) P_j^*(u_{\pi(j)}|x_j) [c_j(u_j, \hat{x}_j, x_j) + C_j^*(u_j, x_j)] \quad (3)$$

şeklinde.  $P_j^*$  ve  $C_j^*$  verilmenden önce de  $\lambda$  birim iletişim maliyetine eşdeğer kestirim hatası maliyeti olmak üzere yerel maliyetlerin  $c_j(u_j, \hat{x}_j, x_j) = c_j^d(\hat{x}_j, x_j) + \lambda c_j^c(u_j, x_j)$  şeklinde kestirim hatası ve iletişim kaynaklı etkilerin toplamı olarak yazılabildiği ve dolayısı ile  $J(\gamma) = J_d(\gamma) + \lambda J_c(\gamma)$  olduğu kabulünü yapacağız.  $c_j = c_j^d + c_j^c$  toplamı Eş.(3)' de yerine koyularak Eş.(2)' de verilen kişilerce en iyi kural

$$\hat{x}_j = \arg \min_{\hat{x}_j \in \mathcal{X}_j} \int_{x_j \in \mathcal{X}_j} dx_j p(Y_j|x_j) p(x_j) P_j^*(U_{\pi(j)}|x_j) c_j^d(\hat{x}_j, x_j) \quad (4)$$

$$u_j = \arg \min_{u_j \in U_j} \int_{x_j \in \mathcal{X}_j} dx_j p(Y_j|x_j) p(x_j) P_j^*(U_{\pi(j)}|x_j) [\lambda c_j^c(u_j, x_j) + C_j^*(u_j, x_j)] \quad (5)$$

şeklinde sırası ile kestirim işlevi  $\delta_j^*(Y_j, U_{\pi(j)})$  ve iletişim işlevi  $\mu_j^*(Y_j, U_{\pi(j)})$  olarak ayrılır.  $P_j^*(u_{\pi(j)}|x_j)$  için [5]' de karşılık gelen ifadelerde toplamlar tümlevlere dönüşerek

$$P_j^*(u_{\pi(j)}|x_j) = \begin{cases} 1 & , \pi(j) = \{ \} \\ \int_{\mathcal{X}_{\pi(j)}} dx_{\pi(j)} p(x_{\pi(j)}) \prod_{i \in \pi(j), \pi(j) \neq \{ \}} P_{i \rightarrow j}^*(u_{i \rightarrow j}|x_i) & \end{cases} \quad (6)$$

halini alır ve  $P_{i \rightarrow j}^*(u_{i \rightarrow j}|x_i)$  terimi  $i$ . düğümden  $j$ . düğüme mesajın  $x_i$ ' ye koşullu olasılık yoğunluğu olmak üzere

$$P_{i \rightarrow j}^*(u_{i \rightarrow j}|x_i) = \sum_{\substack{u_i \in \mathcal{U}_i \\ u_{\pi(i)} \in \mathcal{U}_{\pi(i)}}} P_i^*(u_{\pi(i)}|x_i) p(u_i|u_{\pi(i)}, x_i; \mu_i^*) \quad (7)$$

şeklinde bulunur.  $C_j^*(u_j, x_j)$  terimleri de aynı şekilde

$$C_j^*(u_j, x_j) = \begin{cases} 0, \chi(j) = \{ \} \\ \sum_{k \in \chi(j)} C_{k \rightarrow j}^*(u_{j \rightarrow k}, x_j), \chi(j) \neq \{ \} & \end{cases} \quad (8)$$

olur.  $C_{k \rightarrow j}^*(u_{j \rightarrow k}, x_j)$  terimleri ise

$$C_{k \rightarrow j}^*(u_{j \rightarrow k}, x_j) = \int dx_{\pi(k)} p(x_{\pi(k)}|x_j) \sum_{x_k} \prod_{u_{\pi(k)} \setminus j' \in \pi(k) \setminus j} P_{j' \rightarrow k}^*(u_{j' \rightarrow k}|x_{j'}) I(u_{\pi(k)}, x_k; \gamma_k^*) \quad (9)$$

eşitliği ile bulunur. Burada

$$I(u_{\pi(k)}, x_k; \gamma_k^*) \triangleq J_{d|x_k, u_{\pi(k)}} + \sum_{u_k} (\lambda c_k^c(u_k, x_k) + C_k^*(u_k, x_k)) p(u_k|x_k, u_{\pi(k)}; \mu_k^*) \quad (10)$$

<sup>2</sup>Bildiride  $-j \triangleq (1, \dots, j-1, j+1, \dots, N)$  olarak kullanılacaktır.  $-j$  indis kümesiye  $\gamma_{-j}$  ile  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_N)$  temsil edilir.

<sup>3</sup>[5]' de  $p(z_j|x_j, u_{\pi(j)})$  dağılımları kanal modelidir. Biz iletişim kanallarını ideal kabul etmekte ve böyle bir model kullanmamaktayız.

$$J_{d|x_k, u_{\pi(k)}} \triangleq \int dy_k c_k^d(\delta_k^*(y_k, u_{\pi(k)}), x_k) p(y_k|x_k) \quad (11)$$

$$p(u_k|x_k, u_{\pi(k)}; \mu_k^*) = \int_{y_k \in \mathcal{Y}_k} dy_k p(u_k|y_k, u_{\pi(k)}; \mu_k^*) p(y_k|x_k) \quad (12)$$

şeklinde. Eş.(6) incelendiğinde,  $j$ . düğüme gelen mesajlar  $u_{\pi(j)} = \{u_{i \rightarrow j}\}_{i \in \pi(j)}$ ' in olabilirlik işlevi olduğu ve Eş.(7) ile düşünülünce tamamen  $j$ . düğümün ata düğümlerinin yerel kuralları tarafından belirlendiği görülür. Eş.(8) ve Eş.(9) değerlendirildiğinde  $C_j^*(u_j, x_j)$  teriminin  $j$ . düğümün ilişkilendirildiği rasgele değişkenin  $x_j$  değeri alması durumunda  $u_j$  mesajının ardıllarda (Çocuk düğümler, onların çocukları...) oluşturacağı iletişim ve kestirim kaynaklı toplam maliyetini beklenen değeri olduğu ve hesaplanmasının tamamen ardılların yerel kurallarına bağlı olduğu görülür. Buna  $u_j$ ' yi iletme maliyeti de eklenerek  $\lambda c_j^c(u_j, x_j) + C_j^*(u_j, x_j)$  elde edilir. Böylece Eş.(5)' deki iletişim işlevinin toplam beklenen maliyeti en düşük olan mesajı iletildiği görülür. Eş.(4) ve (5)'deki kişilerce en iyi yerel kural ile Eş.(6)-(12) göz önüne alındığında, Algoritma 1 ile verilen döngü,  $\gamma_0 = (\gamma_1^0, \dots, \gamma_N^0)$  şeklinde bir ilk stratejiden başlayarak Algoritma 2 ile verilen hali alır.

**Algoritma 2: Kişilerce en iyi (dağıtk) kestirim stratejisine yakınsayan bir özineleme.**

- 1)  $l = l + 1$ ;
- 2)  $j = 1, \dots, N$  için
  - i)  $\{P_{i \rightarrow j}^l(u_{i \rightarrow j}|x_i)\}_{i \in \pi(j)}$  'leri kullanarak
  - ii)  $\{P_{j \rightarrow k}^l(u_{j \rightarrow k}|x_j)\}_{k \in \chi(j)}$  'leri hesapla;
- $j = N, \dots, 1$  için
  - i)  $\{P_{i \rightarrow j}^l(u_{i \rightarrow j}|x_i)\}_{i \in \pi(j)}$  ve  $\{C_{k \rightarrow j}^l(u_{j \rightarrow k}, x_j)\}_{k \in \chi(j)}$  'lerle
  - ii)  $\delta_j^l(Y_j, U_{\pi(j)})$  ve  $\mu_j^l(Y_j, U_{\pi(j)})$  ifadelerini güncelle
  - iii)  $\{C_{j \rightarrow i}^l(u_{i \rightarrow j}, x_i)\}_{i \in \pi(j)}$  'leri hesapla;
- 3) Eğer  $J(\gamma^{l-1}) - J(\gamma^l) < \epsilon$  ise dur, değilse (1)' e git;

### 2.3. Kişilerce En İyi Dağıtk Kestirimciye MK Yaklaşımı

Kavramsal olarak, Algoritma 2 ile bir ilk stratejiden başlayarak daha iyi bir strateji elde edilir. Ancak Eş.(6)-(12) ifadelerinin genel olarak kapalı bir çözümünün olmadığı görülür. Biz, bu sorunun üstesinden gelmek için MK yaklaşımlarını kullanan nümerik bir çözüm önermekteyiz. Klasik MK tümlev hesaplama yaklaşımında  $i = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) f(x)$  iken  $i$  aranmaktadır ve  $k = 1, \dots, M$  için  $x^{(k)} \sim p(x)$  olmak üzere  $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M f(x^{(k)}) \rightarrow i$  (1 olasılığı ile). Önem Ağırlıklı Örnekleme (Importance Sampling)(ÖAÖ) ise  $p(x)$ ' ten örnekler üretemeyip  $g(x)$ ' ten üretebiliyorsak uygulanabilir ve  $k = 1, \dots, M$  için  $x^{(k)} \sim g(x)$  ve  $\omega^{(k)} = p(x^{(k)})/g(x^{(k)})$  olmak üzere  $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \omega^{(k)} f(x^{(k)}) \rightarrow i$  (1 o.i.) olur. Örnekleme ağırlıkları  $\omega^{(k)}$ , ler çoğunlukla 0 ise  $i$  değeri için

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^M \omega^{(k)}} \sum_{k=1}^M \omega^{(k)} f(x^{(k)}) \quad (13)$$

şeklinde bir kestirim, yanlı olmakla beraber, kullanılabilir [7]. Yukarıdaki eşitliklerle Algoritma 2' de yer alan hesaplamalar örneklemler ile ifade etmek mümkündür.  $\gamma_{-j} = \gamma_{-j}^*$  iken  $\tilde{\gamma}_j \approx \gamma_j^*$  olacak şekilde bir MK yaklaşımını 3 adımda elde edeceğiz:

i) Eş.(4) ve (5) için klasik MK tümlev hesaplama yaklaşımı uygulanarak  $m = 1, \dots, M$  için  $x_j^{(m)} \sim p(x_j)$  olmak üzere

$$\tilde{x}_j = \tilde{\delta}(Y_j, U_{\pi(j)}) \triangleq \arg \min_{x_j \in \mathcal{X}_j} \sum_{m=1}^M p(Y_j|x_j^{(m)}) P_j^*(U_{\pi(j)}|x_j^{(m)}) c_j^d(x_j, x_j^{(m)}) \quad (14)$$

$$\tilde{u}_j = \tilde{\mu}(Y_j, U_{\pi(j)}) \triangleq \arg \min_{u_j \in \mathcal{U}_j} \sum_{m=1}^M p(Y_j|x_j^{(m)}) P_j^*(U_{\pi(j)}|x_j^{(m)}) \left[ \lambda c_j^c(u_j, x_j) + C_j^*(u_j, x_j^{(m)}) \right] \quad (15)$$

şeklinde. Başka bir ifade ile  $\tilde{\delta}(Y_j, U_{\pi(j)}) \approx \delta(Y_j, U_{\pi(j)})$  ve  $\tilde{\mu}(Y_j, U_{\pi(j)}) \approx \mu(Y_j, U_{\pi(j)})$  olur.

ii)  $Y_j$  ve  $U_{\pi(j)}$  verildiğinde  $\tilde{\delta}$  ve  $\tilde{\mu}$  nun hesaplanabilmesi için  $\forall u_{\pi(j)} \in \mathcal{U}_{\pi(j)}$  ve  $\forall u_j \in \mathcal{U}_j$  için  $\{P_j^*(u_{\pi(j)}|x_j^{(m)})\}_{m=1}^M$ , ve  $\{C_j^*(u_j, x_j^{(m)})\}_{m=1}^M$ , 'ye ihtiyaç vardır. Varsayalım  $i \in \pi(j)$  için  $x_i^{(m)} \sim p(x_i)$ ,  $m = 1, \dots, M$  üretilmiş ve  $\{P_{i \rightarrow j}^*(U_{i \rightarrow j}|x_i^{(m)})\}_{m=1}^M$  bilinmektedir. Bu durumda Eş.(6)' ya ÖAÖ ile bir yaklaşım, Eş.(13) bu ifadeye uygulanarak  $\omega_j^{(m)(m')} = p(x_{\pi(j)}^{(m')}|x_j^{(m)}) / \prod_{i \in \pi(j)} p(x_i^{(m')})$  iken<sup>4</sup>

$$\tilde{P}_j^*(U_{\pi(j)}|x_j^{(m)}) = \frac{1}{\sum_{m'=1}^M \omega_j^{(m)(m')}} \sum_{m'=1}^M \omega_j^{(m)(m')} \times \prod_{i \in \pi(j)} P_{i \rightarrow j}^{m' \rightarrow 1}(U_{i \rightarrow j}|x_i^{(m')}) \quad (16)$$

olur. Yine benzer bir varsayım olarak  $k \in \chi(j)$  için  $\{C_{k \rightarrow j}^*(u_{j \rightarrow k}, x_j^{(m)})\}_{m=1}^M$  biliniyor ise Eş.(8) doğrudan kullanılarak  $\{C_j^*(u_j, x_j^{(m)})\}_{m=1}^M$  bulunur.

iii)  $i \in \pi(j)$  ve  $\forall u_{i \rightarrow j} \in \mathcal{U}_{i \rightarrow j}$  için  $\{P_{i \rightarrow j}^*(u_{i \rightarrow j}|x_i^{(m)})\}_{m=1}^M$  ile  $k \in \chi(j)$  ve  $\forall u_{j \rightarrow k} \in \mathcal{U}_{j \rightarrow k}$  için  $\{C_{k \rightarrow j}^*(u_{j \rightarrow k}, x_j^{(m)})\}_{m=1}^M$  değerlerinin bulunmasında yine MK yaklaşımları kullanılacaktır. Varsayalım  $i \in \pi(j)$  için  $\{P_i^*(U_{\pi(i)}|x_i^{(m)})\}_{m=1}^M$  bilinmektedir.  $x_i = x_i^{(m)}$  için Eş.(7)' nin hesaplanmasında  $\{p(u_i|u_{\pi(i)}, x_i^{(m)}; \mu_i^*)\}_{m=1}^M$  gereklidir<sup>5</sup>. ÖAÖ ile bir yaklaşım, gözlem sürecinin marjinal dağılımından üretilmiş,  $p = 1, \dots, P$  için  $y_i^{(p)} \sim p(y_i)$  şeklinde bir örneklem kullanılarak  $\omega_i^{(m)(p)} = p(y_i^{(p)}|x_i^{(m)})/p(y_i^{(p)})$  olmak üzere

$$\tilde{p}(u_i|u_{\pi(i)}, x_i^{(m)}; \mu_i^*) = \frac{1}{\sum_{p=1}^P \omega_i^{(m)(p)}} \sum_{p=1}^P \omega_i^{(m)(p)} \delta_{u_i, \mu_i^*(y_i^{(p)}, u_{\pi(i)})} \quad (17)$$

şeklinde ve burada  $\delta$  Kronecker delta işlevidir. Benzer şekilde Eş.(9)' da yer alan ve ifade (11) ile verilen  $J_{d|x_k, u_{\pi(k)}}$  in  $\{x_k^{(m)}\}_{m=1}^M$  için hesaplanmasına yaklaşım

$$\tilde{J}_{d|x_k, u_{\pi(k)}} = \frac{1}{\sum_{p=1}^P \omega_k^{(m)(p)}} \sum_{p=1}^P \omega_k^{(m)(p)} c_k^d(\delta_k^*(y_k^{(p)}, u_{\pi(k)}), x_k^{(m)}) \quad (18)$$

olur. Böylece  $C_{k \rightarrow j}^*(u_{j \rightarrow k}, x_j^{(m)})$  için ÖAÖ ile bir yaklaşım  $\tilde{I}(u_{\pi(k)}, x_k^{(m)}; \gamma_k^*) = \tilde{J}_{d|x_k, u_{\pi(k)}} + \sum_{u_k \in \mathcal{U}_k} (\lambda c_k^c(u_k, x_k^{(m)}) + C_k^*(u_k, x_k^{(m)})) \tilde{p}(u_k|x_k^{(m)}, u_{\pi(k)}; \mu_k^*)$  ifadesi hesaplandıktan sonra

$$\omega_{C_{k \rightarrow j}}^{(m)(m')} = p(x_{\pi(k)}^{(m')}|x_j^{(m)})/p(x_k^{(m')}) \prod_{j' \in \pi(k) \setminus j} p(x_{j'}^{(m')})$$

olmak üzere

$$\tilde{C}_{k \rightarrow j}^*(u_{j \rightarrow k}, x_j^{(m)}) = \frac{1}{\sum_{m'=1}^M \omega_{C_{k \rightarrow j}}^{(m)(m')}} \sum_{m'=1}^M \omega_{C_{k \rightarrow j}}^{(m)(m')} \sum_{u_{\pi(k)} \setminus j} \prod_{j' \in \pi(k) \setminus j} P_{j' \rightarrow k}^*(u_{j' \rightarrow k}|x_{j'}^{(m')}) \tilde{I}(u_{\pi(k)}, x_k^{(m')}; \gamma_k^*) \quad (20)$$

şeklinde. Sonuç olarak yukarıdaki adımlar ile  $\tilde{\gamma}_j \approx \gamma_j^*$  elde etmiş olduk. Bu yaklaşımları tüm düğümler için uygulayarak Algoritma 2' deki tüm adımları yaklaşık ifadeleriyle değiştirmiş oluruz ve Algoritma 3' ü elde ederiz.

<sup>4</sup>Dikkat edilirse  $\{x_i^{(m')}\}_{i \in \pi(j)} \sim \prod_{i \in \pi(j)} p(x_i^{(m')})$

<sup>5</sup> $p(u_i|u_{\pi(i)}, x_i^{(m)}; \mu_i^*) = \int_{y_j} dy_j p(u_i|u_{\pi(i)}, x_i^{(m)}; \mu_i^*) \times p(y_i|x_i^{(m)})$  olduğuna dikkat ediniz.

**Algoritma 3: Kişilerce en iyi dağıtık kestirim stratejisine Monte Karlo yöntemleri ile yaklaşıkleyen özinyeleme.**

1)  $l = l + 1$ ;  
2)  $j = 1, \dots, N$  için  
 $\{\{\tilde{P}_{i \rightarrow j}^l(u_{i \rightarrow j} | x_i^{(m)})\}_{m=1}^M\}_{i \in \pi(j)}$  'leri kullanarak  
i)  $\{\{\tilde{P}_{j \rightarrow k}^l(u_{j \rightarrow k} | x_j^{(m)})\}_{m=1}^M\}_{k \in \chi(j)}$  'leri hesapla;  
 $j = N, \dots, 1$  için  
 $\{\{\tilde{P}_{i \rightarrow j}^l(u_{i \rightarrow j} | x_i^{(m)})\}_{m=1}^M\}_{i \in \pi(j)}$  ve  
 $\{\{\tilde{C}_{k \rightarrow j}^l(u_{j \rightarrow k}, x_j^{(m)})\}_{m=1}^M\}_{k \in \chi(j)}$  'leri kullanarak  
i)  $\delta_j^l(Y_j, U_{\pi(j)})$  ve  $\tilde{\mu}_j^l(Y_j, U_{\pi(j)})$  ifadelerini güncelle  
ii)  $\{\{\tilde{C}_{j \rightarrow i}^l(u_{i \rightarrow j}, x_i^{(m)})\}_{m=1}^M\}_{i \in \pi(j)}$  'leri hesapla;  
3) Eğer  $\bar{J}(\gamma^{l-1}) - \bar{J}(\gamma^l) < \varepsilon$  ise dur, değilse (1)'e git;

### 3. Örnek

Algoritma 3 ile sunduğumuz yaklaşık dağıtık kestirimci eniyeleme yöntemi kullanılarak Şekil(1a)' da sunulan ağ ile (1b)' de Markov Rasgele Alan temsili görülen rasgele alanın kestirimi yapılacaktır. İletişim bağları için  $U_{1 \rightarrow 3} = U_{2 \rightarrow 3} = U_{3 \rightarrow 4} = \{0, 1, 2\}$  ve maliyet işlevi  $u_{i \rightarrow j} = 0$  ise  $c_j^d(u_{i \rightarrow j}, x_i) = 0$  ve değilse  $c_j^d(u_{i \rightarrow j}, x_i) = 1$  şeklinde seçilerek, iletişim işlevi hiç mesaj göndermemeye ya da 1 bitlik bir mesaj hesaplamaya karar veren bir mekanizmaya dönüştürülmüştür. Yerel kestirim hatası maliyetleri MMSE kestirimciye benzer şekilde  $c_j^d(x_j, \hat{x}_j) = (x_j - \hat{x}_j)^2$ , rasgele cisim  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  ise  $x \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_x)$  olarak Gauss dağılıma sahip ve ortak değişinti matrisi Şekil 1b' de görülen çizgeyi sağlayacak şekilde

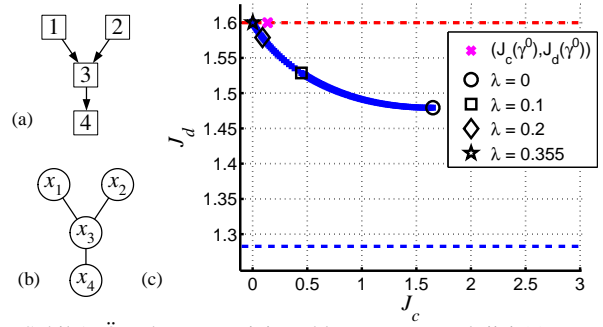
$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 2 & 1.125 & 1.5 & 1.125 \\ 1.125 & 2 & 1.5 & 1.125 \\ 1.5 & 1.5 & 2 & 1.5 \\ 1.125 & 1.125 & 1.5 & 2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

olarak seçilmiştir. Ölçümler  $j = 1, \dots, 4$  için  $\sigma_n^2 = 0.5$  ve  $n_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$  olmak üzere  $y_j = x_j + n_j$  şeklindedir ve olabilirlik işlevleri  $p(y_j | x_j) = \mathcal{N}(x_j, 0.5)$  olur<sup>6</sup>. Başlangıç kuralı olarak tüm düğümler; i) miyop olarak nitelenen bir davranışla gelen mesajlardan bağımsız olarak  $\delta_j^0(y_j, u_{\pi(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_j x_j p(x_j | y_j)$  ile kestirim ve ii) ölçülen  $y_j$ ' ye karşılık  $y_j < -2\sigma_n, -2\sigma_n \leq y_j \leq 2\sigma_n$  ve  $y_j > 2\sigma_n$  için sırasıyla  $\mu_j^0(y_j, u_{\pi(j)}) = 1, 0, 2$  olan nicemleyiciyle de iletişim yapar.

Gerekli örneklemeler için ise  $x'$  in marjinal dağılımları  $p(x_j)$ ' lerden üretilen  $M = 2000$ 'er ve  $p(y_j)$ ' lerden üretilen  $P = 20000$ ' er örnek kullanılmıştır. Şekil (1c)' de  $\lambda$ ' nın farklı değerleri için yakınsanan çözüm  $\tilde{\gamma}^*$  ların yaklaşık başarımlar noktaları  $(\bar{J}_c, \bar{J}_d)$  sergilenmektedir. İletişim ve kestirim hatası için seçilen maliyet işlevlerine göre  $J_c$  ve  $J_d$  sırasıyla toplam ortalama kanal kullanımı (OKK) ve toplam hata kareleri ortalaması (HKO) olmaktadır. Kesikli üst ve alt sınır sırası ile miyop kural ve merkezci en iyi çözüm<sup>7</sup> için toplam HKO' dur. Merkezci yaklaşımda tüm gözlemler iletilirken,  $y_j$   $N$  bitle temsil edilirse  $3N$  bitlik OKK ortaya çıkar ki tipik olarak  $N \geq 64$ ' tür. Dağıtık durumda ise,  $\lambda = 0$  için iletişim maliyeti yoktur, ancak hiç mesaj gelmemesi de bilgi taşıdığından OKK yaklaşık 1.65 bit ile 3 bitlik kapasitenin %75' inden küçüktür. Bu OKK ile bile, HKO 1.6' dan  $\approx 1.48$ ' e gerileyerek miyop kuralındaki daha iyi bir başarımlar elde edilmektedir.

<sup>6</sup>Böylece tüm algılayıcıların sinyal gürültü oranı  $6dB$ ' dir.

<sup>7</sup>Merkezci yaklaşımda tüm gözlemler merkeze iletilir ve örnekteki durumda  $\hat{x}_j = \int_{-\infty}^{\infty} dx_j p(x_j | y_1, \dots, y_4)$  halini alır.



Şekil 1: Örnek senaryo için çoklu ağaç ağ topolojisi (a), rasgele cismin Markov Rasgele Alan çizge modeli (b) ve  $\lambda$  değeri 0' dan 0.001 adımlarla artırılırken yakınsanan MK dağıtık kestirim stratejilerinin yaklaşık başarımları (c).

İletişimin hata karelerine göre pahası olan  $\lambda$  artırılırken, bir  $\lambda^*$  değerinden sonra iletişimi kesip miyop kestirim yapma kişilerce en iyi olmaktadır. Sistemin kestirim maliyetini düşürmek için bit başına ödeyeceği en yüksek paha olan  $\lambda^*$  örnekte  $\lambda^* \approx 0.355$  olarak bulunmuştur.

### 4. Sonuç

Bu bildiride bir rasgele cismin iletişim kısıtları altında kestirimini yapan dağıtık bir sistem için kişilerce en iyi çözüme yaklaşık kurallar üreten bir algoritma önerdik. Bu yaklaşımla i) Önsel dağılım bilgisi de probleme katılmakta ii) İletişim kısıtları çoklu-ağaç bir topoloji, kanallarda iletilen sembol kümesi ve iletişim maliyeti işlevinin seçimi ile probleme yansıtılmakta iii) Gauss dağılımlara kısıtlı kalmayan sonuçlar üretilebilmektedir. Bu şekilde literatürde yer alan ve daha çok kestirim maliyetini düşüren nicemleyici tasarımı çerçevesindeki dağıtık kestirimci yaklaşımlarından daha genel topolojiler için, iletişim maliyetini de göz önüne alan ve pratik amaçlar için yeterli yaklaşıklıkta sonuçlar elde edebilmekteyiz. Bunun yanında kestirim ve iletişim maliyetlerinin farklı seçimleri için yakınsanan başarımlar noktaları göz önüne alındığında, bu iki değer arasındaki ilişki nicemsel bir şekilde incelenebilmektedir.

### 5. Kaynakça

- [1] W. M. Lam and A. R. Reibman, "Design of quantizers for decentralized estimation systems," *IEEE Trans. on Communications*, cilt 41, no.11, Kasım 1993.
- [2] J. A. Gubner, "Distributed estimation and quantization," *IEEE Trans. on Inf. Theory*, cilt 39, no. 4, Temmuz 1993.
- [3] Z. Q. Luo, "Universal decentralized estimation in a bandwidth constrained sensor network," *IEEE Trans. on Information Theory*, cilt 51, no.6, Haziran 2005.
- [4] A. Ribeiro and G. Giannakis, "Bandwidth-constrained distributed estimation for wireless sensor networks-Part I: Gaussian Case," *IEEE Trans. on Signal Processing*, cilt 54, no. 3, Mart 2006.
- [5] O. P. Kreidl, "Graphical Models and Message-Passing Algorithms for Network-Constrained Decision Problems", Doktora Tezi, MIT, 2008.
- [6] E.B. Sudderth, M. Mandel, W. Freeman and A.S. Willsky, "Visual Hand Tracking Using Nonparametric Belief Propagation," *IEEE CVPR*, Haziran 2002.
- [7] C. P. Robert and G. Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, 2. Basım, Springer, 2004.